1. INTRODUCERE, MĂRIMI FIZICE, DIMENSIUNI, UNITĂȚI DE MĂSURĂ.

Nu întâmplător studiul fizicii începe cu studiul mecanicii: în cadrul mecanicii veți învăța să descrieți, folosind matematica, fenomene fizice observate în natură; învățați noțiuni şi mărimi fizice fundamentale (traiectorie, viteză, accelerație, energie, câmp, moment cinetic, ...) şi legi (legi de conservare, teoremele impulsului, ...) care vor fi folosite în toate capitolele fizicii.

Mecanica studiază mişcarea corpurilor (solide, lichide, gazoase) şi cauzele care produc mişcarea. De obicei împărțim studiul mecanicii în trei părți: cinematica, dinamica şi statica. ***Cinematica*** este o parte a mecanicii care studiază mişcarea în spațiu şi timp făcând abstracție de cauzele mişcării. Foloseşte noțiuni ca: traiectorie, viteză, accelerație, ecuație de mişcare. ***Dinamica*** ia în considerare forțele care acționează asupra corpurilor şi studiază efectul forțelor asupra mişcării corpurilor. Vom defini noțiunile de forță, moment (cinetic, al forței), energie, impuls şi vom descoperi legile de conservare. ***Statica*** studiază echilibrul corpurilor sub acțiunea diferitelor tipuri de forțe (introducem noțiunile de echilibru de rotație şi translație, analizăm condițiile de echilibru, ...).

Cursul acesta are ca şi surse de inspirație diverse manuale de mecanică şi de fizică generală. Fiind vorba de un curs de mecanică clasică, diferențele dintre diferitele surse de inspirație folosite constau de cele mai multe ori în diferențe de abordare şi prezentare a informațiilor. Aveți aici, deci, “aceeaşi Mărie, cu altă pălărie”. Pentru a uşura lectura ei, m-am ferit să încarc cursul cu indici bibliografici preferând să listez la început bibliografia recomandată/folosită.

BIBLIOGRAFIE.

1. A. Hristev, *Mecanica şi acustica*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1982. ***Are şi probleme la sfârşitul fiecărui capitol***.

2. G. Margaritondo, *Ma Physique*, pe calculatorul de la Biblioteca Facultății de Fizică sau http://sb3.epfl.ch/gm-perso.data/MAPHYcorr1.pdf

3. D. Kleppner, R. Kolenkov, *An introduction to mechanics*, McGraw-Hill 1983

4. J.-Ph. Ansermet, *La Mécanique Rationnelle*, pe calculatorul de la Biblioteca Facultății de Fizică sau http://www.scribd.com/doc/20939918/La-Mecanique-Rationnelle

5. F. W. Sears et al., *Fizica*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

6. Ch. Kittel et al., *Cursul de Fizică BERKELEY,* volumul 1*,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

7. D. Halliday, R. Resnick – *Fizica* vol 1, Bucuresti, Editura Didactică şi pedagogică, 1972.

8. C. Plăvițiu et al., *Probleme de mecanică, fizică şi acustică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

9. A. Pop, *Metode fundamentale aplicate la rezolvarea problemelor de mecanică*, imprimeria UBB, 2000.

Acest curs de mecanică şi acustică se adresează în principal studenților din anul I de la Facultatea de Fizică a UBB dar poate fi abordat şi de profesori sau elevi de liceu. Se presupune că studenții au noțiuni elementare de matematică: calcul elementar, rezolvarea ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații, geometrie, limite, derivate, integrale sau, cel puțin, că aceste noțiunile nu le sunt străine.

LIMBAJUL FIZICII ESTE MATEMATICA

În fapt, fizica se ocupă de *măsurători*, folosind matematica pentru a descrie relațiile dintre rezultatele diferitelor măsurători (de ex: măsurând spațiul străbătut de un corp în mişcare rectilinie şi timpul în care străbate acest spațiu, putem afla viteza corpului folosind ecuația $v = s / t$).

FIZICA, ca ştiință a naturii (physis = natură, în limba greacă), **este o ştiință experimentală**. Este *ştiință*, pentru că se bazează pe “metoda ştiințifică[1]” în

[1] Metoda ştiințifică (MS) este metoda prin care se încearcă construirea unei reprezentări corecte, logice şi obiective a lumii. MS presupune mai multe etape care trebuie parcurse pentru investigarea fenomenelor şi dobândirea de noi cunoştințe, pentru corectarea şi/sau integrarea cunoştințelor anterioare. Cele mai importante astfel de etape sunt: 1) Observarea şi descrierea fenomenelor sau a unui grup de fenomene, definirea problemei şi culegerea de informații, 2) Formularea ipotezelor care ar explica fenomenul (în fizică ipoteza ia, de multe ori, forma unui mecanism cauzal sau a unei expresii matematice), 3) Folosirea ipotezei pentru a prezice existența unor alte fenomene sau pentru a

încercarea ei de a explica/prezice fenomenele pe care le studiază şi este ştiință *experimentală* pentru că foloseşte experimentul ca şi test final/verificare a oricărei preziceri sau teorii, prin măsurători ale unor mărimi fizice cu care operează teoria respectivă. Noțiunea de ***mărime fizică*** are deci sens de cantitate, adică ceva ce poate fi măsurat[2] şi exprimat printr-un număr (**valoarea numerică** a mărimii fizice respective). Vom scrie, deci:

MF = V UM

unde prin *MF* am indicat mărimea fizică iar V este valoarea numerică a acesteia măsurată cu unitatea de măsură UM.

Exemplu: am măsurat lungimea unei mese cu un metru de croitorie (divizat în centimetri), obținând: *l* = 2.20 m; *l* = lungimea mesei = mărimea fizică MF, 2.20 = valoarea V, m = metru = unitatea de măsură UM.

Exemple de mărimi fizice (unități de măsură): masa (kg, tone, unitate atomică de masă), forța (N, dyne), timpul (s, minute, ani), intensitatea curentului electric (A), intensitate luminoasă (Cd), energia (J, calorii, electron-volt), ... Electronul, atomul, câmpul gravitațional ***nu*** sunt mărimi fizice în sensul enunțat mai sus ci sunt *noțiuni,* cu care fizica operează. Proprietăți ale acestora: sarcina sau spinul electronului, intensitatea câmpului gravitațional într-un punct oarecare, ... sunt *mărimi fizice* care pot fi măsurate.

***A măsura înseamnă a compara* ceea ce avem de măsurat, mărimea fizică MF, cu un etalon (unitate de măsură, UM) pentru a vedea de câte ori (= valoarea numerică, V) se cuprinde etalonul în mărimea pe care vrem să o măsurăm.** Rezultatul măsurătorii este valoarea numerică a mărimii respective şi depinde de mărimea unității de măsură folosită ca etalon (vezi mai sus).

Exemplu: putem măsura lungimea cu pasul, palma, liniarul, ruleta, micrometrul, ...; măsurăm timpul cu cronometrul, pendulul, pulsul, ...

---

prezice rezultatele cantitative ale unor noi experimente, 4) Efectuarea de experimente pentru testarea prezicerilor.

[2] Despre măsurători, erori şi calculul acestora veți povesti mai în detaliu în cadrul primelor laboratoare de mecanică.

! Dacă schimbăm unitatea de măsură se modifică valoarea numerică a mărimii fizice. Lungimea mesei din primul exemplu ***l* = 2.20 m** poate fi scrisă (dacă alegem centimetrul ca unitate de măsură): ***l* = 220 cm**. *Mărimea mesei (lungimea ei) nu se modifică prin alegerea altor unități de măsură. Doar valoarea numerică a acelei mărimi fizice, exprimată cu ajutorul altor unități de măsură, se modifică.*

! Putem compara *doar* mărimi fizice de acelaşi tip (lungimi cu lungimi, timpi cu timpi, ...). Spunem despre mărimile de acelaşi tip că au aceeaşi ***dimensiune*** (notație [MF]). **Exemplu:** Lungimea mesei, înălțimea sălii de clasă, distanța de la Pământ la Soare, distanța dintre atomii de Na şi Cl în sarea de bucătărie sunt mărimi fizice de acelaşi tip, lungimi, au aceeaşi dimensiune: LUNGIME (L) şi le putem compara între ele.

Numărul *minim* de “dimensiuni” de care avem nevoie pentru a exprima toate mărimile fizice din mecanică este 3 (veți putea verifica aceasta încercând să găsiți “dimensiunea” tuturor mărimilor fizice pe care le întâlniți în mecanică.). Convențional, acestea sunt LUNGIMEA (L), MASA (M) şi TIMPUL (T). Mărimile fizice asociate acestora se numesc *mărimi fizice fundamentale* (lungimea *l*, masa *m* şi timpul *t*). Celelalte mărimi fizice se numesc *mărimi fizice derivate* (impulsul (produsul *mv* are dimensiune de impuls), forța (produsul *ma* are dimensiune de forță), viteza, energia (produsul mv^2 are dimensiune de energie), ..., aria, presiunea). În general, dimensiunea oricărei mărimi fizice din mecanică poate fi scrisă sub forma: $[\mathrm{MF}] = \mathrm{L}^{\alpha}\mathrm{M}^{\beta}\mathrm{T}^{\gamma}$ unde α, β şi γ sunt numere.

Exemplu: Viteza în mişcarea rectilinie uniformă este definită ca şi raportul dintre spațiul parcurs şi intervalul de timp în care a fost parcurs acest spațiu: $v = \frac{s}{t}$.

“Dimensiunea” vitezei va fi deci: $[v] = \left[\frac{s}{t}\right] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = \mathrm{LT}^{-1}$

! Numerele sunt adimensionale (dimensiune 1) iar argumentele funcțiilor trigonometrice, exponențialelor sau logaritmilor *trebuie* să fie de asemenea adimensionale.

Folosim analiza dimensională îndeosebi pentru a verifica soluția analitică a unei probleme înainte de a efectua calculele numerice (care sunt inutile în cazul în care formula de plecare este greşită). *Dimensiunea termenului din stânga a unei ecuații TREBUIE să fie egală cu dimensiunea termenului din partea dreaptă a egalității.*

Exemplu: Care din următoarele ecuații este corectă dimensional? $T = 3\pi\frac{\sqrt{l}}{g}$ sau $T = 3\pi\sqrt{l/g}$? Ştim că T este un interval de timp $[T] = \mathrm{T}$; $[2\pi] = 1$; l este o lungime $[l] = \mathrm{L}$ iar g este accelerația gravitațională $[g] = \mathrm{L/T^2}$. În primul caz, obținem că T este egal cu $\frac{\mathrm{L}^{1/2}}{\mathrm{L/T^2}} = \mathrm{T^2L^{-1/2}}$ ceea ce este greşit, în al doilea caz T este egal cu $\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L/T^2}}\right)^{1/2} = \left(\mathrm{T^2}\right)^{1/2} = \mathrm{T}$, ceea ce este corect.

! Faptul că o ecuație este corectă din punct de vedere (dpdv) dimensional nu înseamnă că ea este corectă şi dpdv fizic, vezi exemplul de mai sus dacă *T* este perioada unui pendul matematic de lungime *l*. Nici una din ecuațiile de mai sus nu este corectă dpdv fizic deşi cea de-a doua este corectă dpdv dimensional.

! O ecuație care nu este corectă dpdv dimensional nu este corectă nici dpdv fizic .

Unitățile de măsură, aşa cum le-am definit la începutul capitolului sunt etaloanele pe care le folosim pentru măsurarea mărimilor fizice. Reamintim că pentru măsurarea lungimii lungime putem avea ca etaloane metrul, palma, centimetru, pasul, ... şi mai puteți defini şi Dvs. câteva. Toate aceste etaloane pot fi folosite atâta timp cât sunt precis definite. Pentru facilitarea comunicării/înțelegerii rezultatelor măsurătorilor s-a adoptat un sistem coerent de unități de măsură care în mecanică se numeşte (MKS = **Metru (m)**, **Kilogram (kg)**, **Secundă (s)**). Sistemul MKS foloseşte doar trei unități de bază pentru mecanică, număr egal cu numărul minim de "dimensiuni" necesare în mecanică, vezi mai sus. *Unitatea de măsură a oricărei mărimi fizice din mecanică poate fi exprimată în funcție de m, kg şi s.*

Dacă vrem să efectuăm măsurători ale unor mărimi fizice din alte domenii ale fizicii (electricitate şi magnetism, termodinamică, optică), MKS nu este suficient. Pentru a completa MKS, se adaugă ca şi unități de măsură (dimensiuni) **Amperul**, A (intensitatea curentului electric), **Candela**, Cd (intensitate luminoasă), **Kelvin**, K (temperatură), **mol**, mol (cantitate de substanță; trebuie specificat la ce se referă: mol de atomi, de molecule, ioni, electroni, particule ...). Acest sistem de unități de măsură se mai numeşte şi **Sistem Internațional de Unități** [3](SI).

Pentru a indica valori numerice foarte mari (mici) se folosesc multipli (submultipli).

Multipli	**Prefix**		**deca**	**hecto**	**kilo**	**mega**	**giga**	**tera**	**peta**	**exa**	**zetta**	**yotta**
	Symbol		da	h	k	M	G	T	P	E	Z	Y
	Factor	10^0	10^1	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}
Submultipli	**Prefix**		**deci**	**centi**	**mili**	**micro**	**nano**	**pico**	**femto**	**atto**	**zepto**	**yocto**
	Symbol		d	c	m	μ	n	p	f	a	z	y
	Factor	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}

Exemplu: 1 km = 10^3 m, 1 mm = 10^{-3} m, etc. .

[3] Bureau Internațional des Poids et Mesures, definitions:

- The **metre** is the length of the path travelled by light in vacuum during a time interval of 1/299 792 458 of a second.
- The **kilogram** is the unit of mass; it is equal to the mass of the international prototype of the kilogram.
- The **second** is the duration of 9 192 631 770 periods of the radiation corresponding to the transition between the two hyperfine levels of the ground state of the caesium 133 atom.
- The **ampere** is that constant current which, if maintained in two straight parallel conductors of infinite length, of negligible circular cross-section, and placed 1 m apart in vacuum, would produce between these conductors a force equal to 2 x 10^{-7} newton per metre of length.
- The **kelvin**, unit of thermodynamic temperature, is the fraction 1/273.16 of the thermodynamic temperature of the triple point of water.
- The **mole** is the amount of substance of a system which contains as many elementary entities as there are atoms in 0.012 kilogram of carbon 12.
- The **candela** is the luminous intensity, in a given direction, of a source that emits monochromatic radiation of frequency 540 x 10^{12} hertz and that has a radiant intensity in that direction of 1/683 watt per steradian.

! Chiar dacă unitatea de măsură a oricărei mărimi fizice poate fi exprimată folosind unități de măsură a Sistemului Internațional, şi multipli (sau submultipli) acestora, vom întâlni adeseori în fizică unități de măsură suplimentare folosite fie pentru simplificarea scrierii rezultatelor în diverse domenii ale fizicii, fie din rațiuni culturale/istorice.

Exemple:

- N (Newton) ca unitate de măsură pentru forță (1N = 1 kg m/s^2);
- Ǻ (Angstrom) ca unitate de măsură a lungimilor în fizica atomică (1 Ǻ = 10^{-10} m, ordinul de mărime al distanțelor interatomice);
- an lumină pentru distanțe interstelare;
- cal putere pentru puterea motoarelor (şi nu wați, ca pentru puterea becurilor);
- Pascal, bar, psi, atmosferă, milimetru coloană de mercur, ... pentru presiune.
- Minut, oră, zi, ... pentru durată
- Electron-volt (pentru energie)
- Unitate atomică de masă, pentru masele atomilor/moleculelor
- Litru pentru volum, ... lista este foarte lungă

! Pentru a trece de la o unitate de măsură la alta de acelaşi tip, există *tabele de conversie*. De exemplu, pentru presiune:

	Pascal (Pa)	**bar (bar)**	**atmosferă tehnică (at)**	**atmosferă (atm)**	**torr (Torr)**	**pound-force per square inch (psi)**
1 Pa	≡ 1 N/m^2	10^{-5}	1.0197×10^{-5}	9.8692×10^{-6}	7.5006×10^{-3}	145.04×10^{-6}
1 bar	100,000	≡ 10^6 dyn/cm^2	1.0197	0.98692	750.06	14.5037744
1 at	98,066.5	0.980665	≡ 1 kgf/cm^2	0.96784	735.56	14.223
1 atm	101,325	1.01325	1.0332	≡ 1 atm	760	14.696
1 torr	133.322	1.3332×10^{-3}	1.3595×10^{-3}	1.3158×10^{-3}	≡ 1 Torr; ≈ 1 mmHg	19.337×10^{-3}
1 psi	6.894×10^{3}	68.948×10^{-3}	70.307×10^{-3}	68.046×10^{-3}	51.715	≡ 1 lbf/in^2

! Sistemul Internațional nu este singurul sistem de unități acceptat. Cea mai cunoscută alternativă este CGS (bazat pe Centimetru-Gram-Secundă). Dacă în mecanică convertirea din unități MKS în CGS este foarte simplă, acesta nu mai este cazul pentru alte domenii alte fizicii, în special electricitate şi magnetism. Las colegilor mei de la aceste discipline plăcerea de a vă desluşi tainele conversiei unităților de măsură în măsurătorile care implică sarcini electrice, câmpuri electrice şi magnetice, tensiuni electrice, etc. .

În continuare, pentru mecanică noi vom folosi doar SI pentru a exprima rezultatele măsurătorilor şi unitățile de măsură ale mărimilor fizice definite.

2. CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL.

Cinematica studiază mişcarea în spațiu şi timp făcând abstracție de cauzele mişcării. Definim mai jos o parte din noțiunile pe care le vom întâlni în acest capitol.

Punct material: Natura este complexă. În studiul ei recurgem adesea la simplificări (modele) eliminând elementele neesențiale care nu influențează (sau influențează foarte puțin) rezultatele investigațiilor noastre. Simplificările efectuate trebuie să țină seama de scopul analizei noastre. Mişcarea planetelor în jurul soarelui poate fi analizată fără a ține cont de rugozitatea suprafeței acestora (considerându-le nişte sfere); Dacă studiem căderea unui măr de la o anumită înălțime şi dorim să aflăm viteza cu care atinge solul, putem să-l considerăm pe acesta ca un punct geometric dotat cu masă (= **punct material**: nu ne interesează dimensiunile sale geometrice şi rotația proprie, cu atât mai puțin culoarea sa - dacă dimensiunile corpului sunt mult mai mici decât înălțimea de cădere). Aproximația nu mai este bună în cazul în care ceea ce dorim să aflăm este care parte a mărului va atinge prima solul, sau în cazul în care dimensiunile mărului sunt comparabile cu distanța de la care îi dăm drumul. Chiar şi în acest al doilea caz, mărul nu va fi reprezentat ca atare în calculele noastre ci, într-o primă aproximație, ar putea fi considerat o sferă. În cinematică nici masa corpului nu ne interesează. Obiectul pe care-l obținem, adică "punctul material fără masă" îl numim: **mobil**.

Alte modele folosite adesea în mecanică: **corp rigid** (distanțele dintre părțile acestuia sunt fixe, nu se deformează în timpul mişcării); **fluid ideal**: se neglijează frecarea între particulele fluidului; ... .

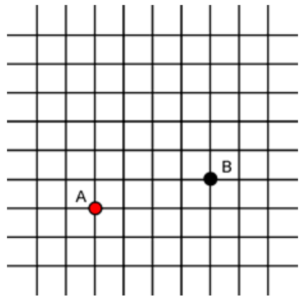
Sistem/corp de referință: Pentru a putea spune despre un corp că este în mişcare (sau în repaus) trebuie să raportăm poziția lui la poziția unui alt corp, numit corp de referință. Dacă de acel corp legăm rigid un sistem de coordonate (de ex. un sistem cartezian ortogonal de 3 axe de coordonate) obținem un sistem de referință (SR).

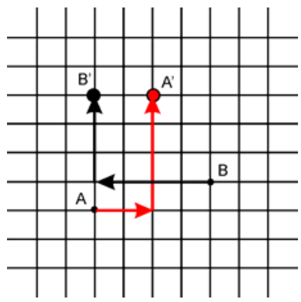
Mişcarea este relativă: un corp poate să fie în mişcare față de un sistem de referință şi în acelaşi timp în repaus (sau în alt fel de mişcare) față de un alt sistem de referință. Mişcarea este simplă, privită din unele sisteme de referință şi complicată, privită din altele. *Va trebui să vă obişnuiți să alegeți SR cel mai adecvat* *problemei pe care o aveți de studiat, pentru ca rezolvarea acesteia să fie cât mai simplă.* Atunci şi interpretarea şi comunicarea rezultatelor va fi mai uşoară.

Traiectorie: Numim traiectorie locul geometric al punctelor prin care trece mobilul în mişcarea sa = curba descrisă de mobil în timpul mişcării sale. Traiectoria poate să fie rectilinie (linie dreaptă) sau curbilinie (caz particular: circulară).

2.1. Vectori.

După cum am precizat la începutul acestui curs, în studiul fenomenelor fizice folosim matematica pentru exprimarea ideilor şi a rezultatelor, adesea complicate, într-o formă compactă şi simplă. Analiza/Algebra vectorială, în forma pe care o prezentăm aici[4], este un bun exemplu pentru rolul matematicii în fizică şi în plus ne va fi foarte utilă pentru descrierea legilor cinematicii, şi nu numai.

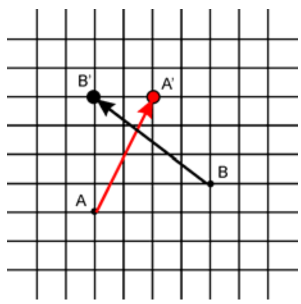




Cei cărora noțiunea de "vector" şi operațiile cu vectori le sunt familiare, povestea introductivă din exemplul de mai jos, despre calculul vectorial, li se va părea puerilă. Pot să sară peste lectura acestui exemplu gândindu-se că, mai devreme sau mai târziu, toți am citit Scufița Roşie.

Exemplu:

Să aşezăm două bile, una roşie (BR) şi una neagră (BN), pe o foaie cu pătrățele în punctele A şi B şi să le deplasăm folosind următoarea convenție: bilele pot fi deplasate doar cu câte un număr întreg de pătrate (unități) spre stânga

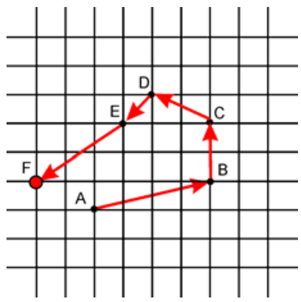


---

[4] Algebra vectorală, în forma pe care o folosim noi astăzi, a apărut pentru prima dată în notițele lui J. Willard Gibbs (1839-1903, cunoscut în principal pentru rezultatele sale din termodinamică) pregătite pentru studenții săi de la Universitatea Yale (USA). Motivația principală a fizicienilor pentru folosirea noțiunii de vector este, se va vedea, simplificarea formei ecuațiilor folosite. Pe de altă parte, combinând analiza vectorială cu elementele de simetrie, putem obține informații prețioase asupra formelor posibile ale unor legi necunoscute.

(dreapta), sus (jos). Pentru a diferenția orientarea stânga-dreapta, sus-jos a deplasărilor, deplasările spre dreapta (sau în sus) sunt considerate pozitive iar cele înspre stânga (sau în jos), sunt considerate negative. Exemplu: în figura din dreapta, BR a fost deplasată două unități spre *dreapta* şi patru în *sus*, în poziția A'; BN a fost deplasată cu patru unități spre *stânga* şi trei în *sus*, în poziția B'. Pentru simplificarea notației, aceste deplasări le putem nota (2,4) şi respectiv (-4,3). Prima cifră indică deplasarea *dreapta(*+), *stânga(*-) iar a doua, deplasarea *sus(*+), *jos(*-) .

Deplasările AA', BB' pot fi identificate şi prin săgeți (săgeți = segmente de dreaptă orientate): deplasarea AA' este, în notația prescurtată, deplasarea (2,4), iar deplasarea BB' este (-4,3). Dacă dorim, putem calcula lungimea segmentelor AA' şi BB' folosind teorema lui Pitagora,: AA' = $\sqrt{2^2+4^2}$ iar BB' = $\sqrt{4^2+3^2}$.



Să calculăm acum care este deplasarea bilei roşii care pleacă din punctul A şi ajunge în punctul F, trecând prin punctele B, C, D, E şi F. Din figură, se vede uşor că deplasarea AF este (-2,1), rezultat la care ajungem şi dacă însumăm deplasările individuale: AB = (4,1), BC = (0,2), CD = (-2,1), DE = (-1,-1), EF = (-3,-2) şi le adunăm: AF = AB + BC + CD + DE + EF = (4,1) + (0,2) + (-2,1) + (-1,-1) + (-3,-2) = (4 + 0 – 2 – 1 – 3, 1 + 2 + 1 – 1 – 2) = (-2,1) QED.

***Tocmai am folosit cu succes ceea ce numim vectori, ca şi segmente de dreaptă orientate, pentru a defini şi măsura deplasarea bilei roşii (şi a celei negre), în exemplele de mai sus*.**

Observăm că, dacă destinația ar fi coincis cu punctul de plecare, adică F ar fi coincis cu A, atunci deplasarea AF ar fi fost (0,0). ! Atenție ! DEPLASAREA şi DRUMUL PARCURS (DISTANȚA STRĂBĂTUTĂ) sunt două noțiuni diferite, având semnificații diferite. Drumul parcurs este suma lungimilor segmentelor parcurse. Folosind teorema lui Pitagora, acolo unde este cazul, şi folosind notația: $|AB|$ = distanța *AB*, vom avea: Distanța străbătută = $|AB|+|BC|+|CD|+|DE|+|EF|$ = $\sqrt{4^2+1^2}+2+\sqrt{2^2+1^2}+\sqrt{1^2+1^2}+\sqrt{3^2+2^2}$ m, dacă lungimea laturii unui pătrat este 1 m.

Din punct de vedere geometric un vector ***este un*** segment de dreaptă orientat ***iar în reprezentare grafică este o săgeată (vezi*** **Figura 1*****). Pentru descrierea unui vector avem nevoie de*** MĂRIME***,*** DIRECȚIE ***şi*** SENS***.***

MĂRIMEA vectorului este lungimea segmentului de dreaptă.

DIRECȚIA este dată de dreapta suport a vectorului. Pe o direcție putem avea două sensuri $\Rightarrow$ sensul trebuie specificat. *Fiecare vector indică o direcție şi un sens pe acea direcție*.

SENSUL (pe direcția respectivă) este indicat de vârful săgeții.

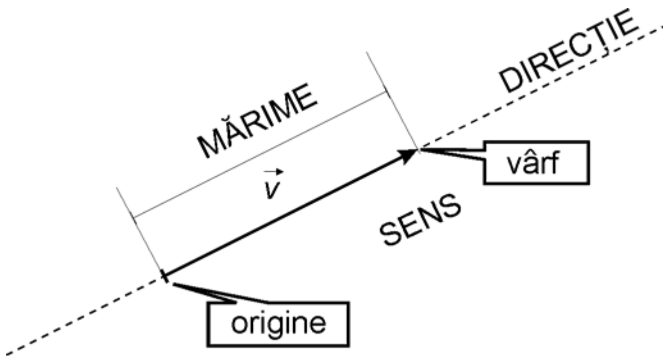


Figura 1: Descrierea vectorului $\vec{v}$. Sunt reprezentate MĂRIMEA, DIRECȚIA, SENSUL, originea vectorului şi vârful acestuia.

Notație: $\vec{v}$ sau ***v*** (caractere îngroşate, BOLD) pentru vectori şi $|\vec{v}|$ sau |***v***| sau *v* pentru mărimea (modulul) vectorului. În cele ce urmează vom încerca să fim consecvenți şi să folosim notații de forma $\vec{v}$ pentru vectori şi respectiv *v* pentru mărimea acestora.

În fizică forța (Figura 2), viteza, accelerația, intensitatea câmpului electric, etc. sunt MĂRIMI FIZICE VECTORIALE: trebuie să le specificăm mărimea, direcția şi sensul pentru a le caracteriza complet. Masa, energia, densitatea, presiunea, etc. sunt MĂRIMI FIZICE SCALARE: le caracterizăm doar prin mărime (număr). Atât pentru vectori cât şi

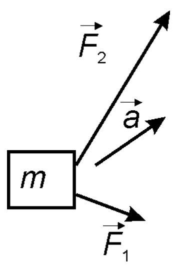


Figura 2. Exemple de vectori (forțele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$, accelerația $\vec{a}$) şi scalari (masa m).

pentru scalari, menționarea unității de măsură este absolut necesară.

2.2. Operații cu vectori.

Înmulțirea unui vector $\vec{a}$ *cu un scalar (număr)* **b**.

Rezultatul este un vector, vezi *Figura 3*, să-l notăm $\vec{c}$; $\vec{c} = \vec{a}b = b\vec{a}$

- Mărime: $c = a\ b$. Mărimea lui $\vec{c}$ este de b ori mărimea lui $\vec{a}$. Dacă $b > 1$ mărimea vectorului $\vec{c}$ este mai mare decât mărimea vectorului $\vec{a}$; dacă $b < 1$ mărimea vectorului $\vec{c}$ este mai mică decât mărimea vectorului $\vec{a}$.
- Direcție: $\vec{c}$ are aceeaşi direcție cu vectorul $\vec{a}$
- Sens: Acelaşi sens cu $\vec{a}$ dacă $b > 0$, sens opus lui $\vec{a}$ dacă $b < 0$.

Înpărțirea unui vector $\vec{a}$ *cu un scalar (număr)* **b.**

Rezultatul este un vector, vezi *Figura 4*, să-l notăm $\vec{c}$; $\vec{c} = \dfrac{\vec{a}}{b}$

- Mărime: $c = a\ /\ b$, i.e. mărimea lui $\vec{c}$ este de $1/b$ ori mărimea lui $\vec{a}$. Dacă $b > 1$ mărimea vectorului $\vec{c}$ este mai mică decât mărimea vectorului $\vec{a}$, dacă $b < 1$ mărimea vectorului $\vec{c}$ este mai mare decât mărimea vectorului $\vec{a}$.
- Direcție: $\vec{c}$ are aceeaşi direcție cu vectorul $\vec{a}$
- Sens: Acelaşi sens cu $\vec{a}$ dacă $b > 0$, sens opus lui $\vec{a}$ dacă $b < 0$.

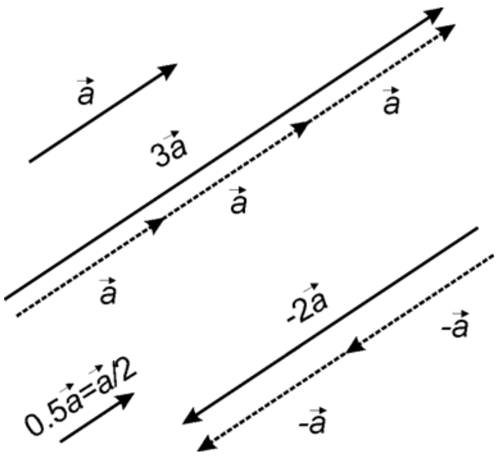


Figura 3: Exemple de înmulțire a unui vector $\vec{a}$ *cu diverşi scalari pozitivi sau negativi, subunitari sau supraunitari.*

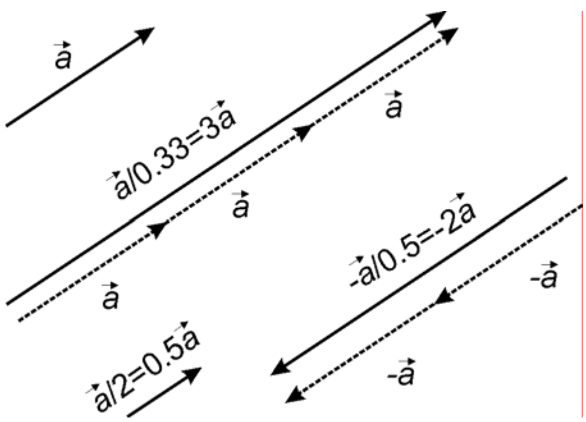


Figura 4: Exemple de împărțire a unui vector $\vec{a}$ *cu diverşi scalari pozitivi sau negativi, subunitari sau supraunitari.*

! ATENȚIE ! ÎMPĂRȚIREA LA UN VECTOR NU ESTE DEFINITĂ (nu putem împărți ceva la o direcție sau la un sens).

Ce obținem dacă împărțim un vector cu modulul său?

Obținem un vector: $\vec{c} = \frac{\vec{a}}{a}$

- Mărime: $c = a / a = 1$, un vector de mărime unitate = VERSOR.
- Direcție: $\vec{c}$ are aceeaşi direcție cu vectorul $\vec{a}$
- Sens: Acelaşi sens cu $\vec{a}$.

! PUTEM AFLA VECTORUL UNITATE AL UNEI DIRECȚII DESCRISĂ DE UN VECTOR, ÎMPĂRȚIND ACEL VECTORUL LA MODULUL SĂU !

Notație: $\frac{\vec{a}}{a} = \vec{1}_a$, vector unitate pe direcția lui $\vec{a}$ iar $\vec{a} = a\vec{1}_a$. Se citeşte: vectorul $\vec{a}$ este egal cu produsul dintre mărimea lui $\vec{a}$ şi vectorul unitate (versorul) pe direcția lui $\vec{a}$, $\vec{1}_a$

! VERSORII NU AU UNITATE DE MĂSURĂ ≡ SUNT ADIMENSIONALI. !

Într-un sistem de coordonate (necoplanare) *xyz*, versorii direcțiilor descrise de cele trei axe sunt notați de obicei cu $\vec{i}$ pentru direcția *x*, $\vec{j}$ pentru direcția *y* şi cu $\vec{k}$ pentru direcția *z*, vezi *Figura 5*. Dacă un vector $\vec{V}$ este orientat de-a lungul direcției *x* (de exemplu) poate fi scris ca: $\vec{V} = V_x\vec{i}$, şi similar pentru vectorii care sunt orientați de-a lungul celorlalte axe.

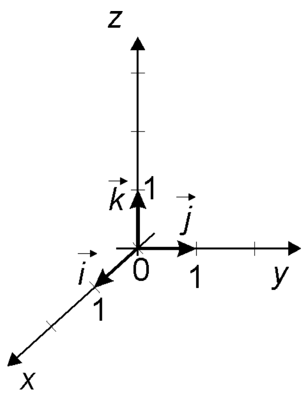


Figura 5. Versorii axelor de coordonate x, y şi z.

Adunarea (compunerea) vectorilor.

Fie doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Rezultatul adunării vectorului $\vec{a}$ cu vectorul $\vec{b}$ este tot un vector, să-l notăm cu $\vec{c}$. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

- Mărime: $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$

(vezi produsul scalar)

- Direcție: vezi Figura 6
- Sens: vezi Figura 6

Adunarea vectorilor are o reprezentare/interpretare geometrică simplă:

Regula paralelogramului: Cei doi vectori se reprezintă astfel încât să aibă originea comună. Se desenează un paralelogram, ca în *Figura 6*, ducând câte o paralelă la fiecare din vectori, care să treacă prin vârful celuilalt vector. *Vectorul sumă este diagonala paralelogramului (care din ele? Cea care uneşte originea comună a vectorilor cu vârful opus)*. Dacă avem de adunat mai mulți vectori, efectuăm aceeaşi operație de mai multe ori:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} =$$
$$= (((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}) + \vec{d}) + \vec{e}$$

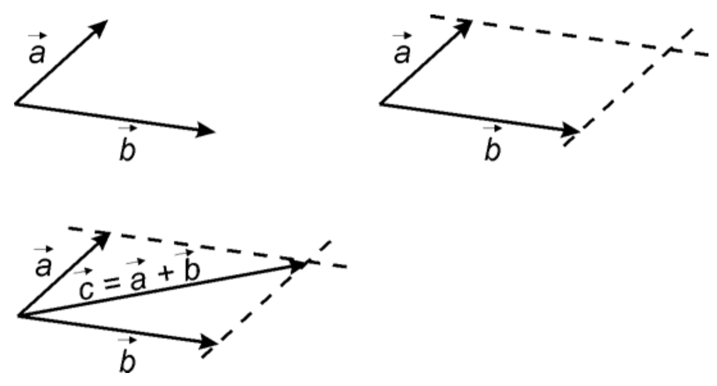


Figura 6. Regula paralelogramului pentru adunarea vectorilor.

Regula triunghiului – pentru adunarea a doi vectori (poligonului – pentru adunarea mai multor vectori):

Se reprezintă vectorii ca în *Figura 7*, unul după celălalt (i.e. cu originea în vârful vectorului precedent). *Vectorul sumă este obținut unind originea primului vector cu vârful ultimului vector*.

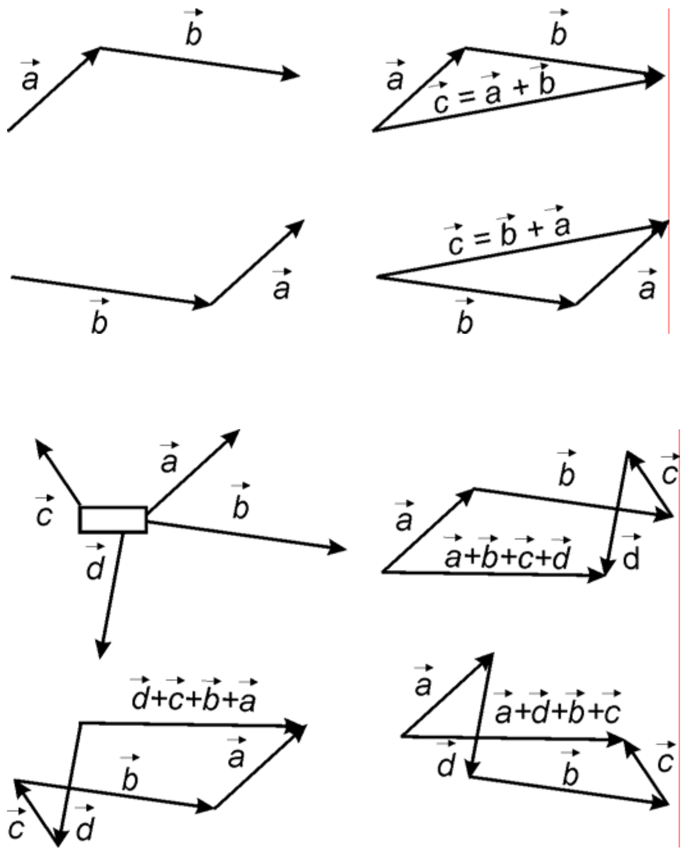


Figura 7. Regula triunghiului (poligonului) pentru adunarea vectorilor.

Se poate demonstra că adunarea vectorilor este:

- Comutativă

  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

- Asociativă

  $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$

- Distributivă

$$(c+d)\vec{a} = c\vec{a} + d\vec{a}$$
$$c(\vec{a}+\vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$$

Scăderea vectorilor.

Fie doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Rezultatul scăderii lui $\vec{b}$ din $\vec{a}$ este un vector, să-l notăm $\vec{c}$. $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

- Mărime: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ (vezi produsul scalar)
- Direcție: vezi *Figura 8.*
- Sens: vezi *Figura 8.*

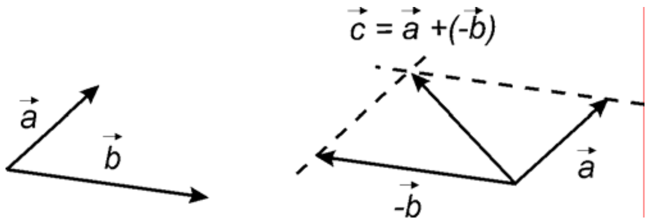


Figura 8. Scăderea vectorilor. Metoda 1

Deoarece $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, pentru scăderea lui $\vec{b}$ din $\vec{a}$, trebuie să-l înmulțim pe $\vec{b}$ cu -1 şi să-l adunăm cu $\vec{a}$, vezi *Figura 8*. Direcția şi sensul vectorului $\vec{c}$ o obținem din regula paralelogramului. Se observă că vectorul $\vec{c}$ putea fi obținut şi fără construcția ajutătoare (-$\vec{b}$), unind vârful lui $\vec{b}$ cu vârful lui $\vec{a}$, adică a scăzătorului cu a descăzutului, vezi *Figura 9*.

Scăderea vectorilor are aceleaşi proprietăți ca şi adunarea: comutativă, asociativă, distributivă.

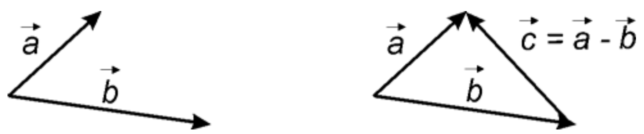


Figura 9. Scăderea vectorilor. Metoda 2

! PUTEM ADUNA/SCĂDEA DOAR VECTORI CARE DESCRIU ACELAŞI TIP DE MĂRIME FIZICĂ i.e. AU ACEEAŞI UNITATE DE MĂSURĂ, CARE VA FI ŞI UNITATEA DE MĂSURĂ A REZULTATULUI !

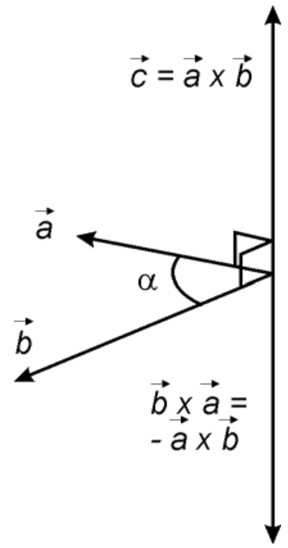


Figura 10. Produsul vectorial a doi vectori.

Produsul vectorial a doi vectori.

Prin definiție produsul vectorial (notație $\times$) a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ care fac între ei unghiul α este un vector $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (vezi *Figura 10*) care are:

- Mărime: $c = ab\sin\alpha$, egală cu aria paralelogramului format din cei doi vectori, vezi *Figura 11*. **! DOI VECTORI SUNT COLINIARI DACĂ PRODUSUL LOR VECTORIAL ESTE NUL !** (aria paralelogramului format de doi vectori paraleli este nulă).
- Direcție: perpendiculară pe cei doi vectori
- Sens: dat de **regula mâinii drepte**:

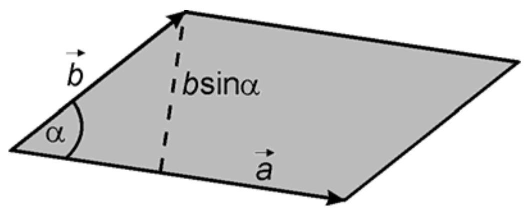


Figura 11. Mărimea vectorului produs vectorial a doi vectori este egal cu aria paralelogramului format de cei doi vectori: c = absinα

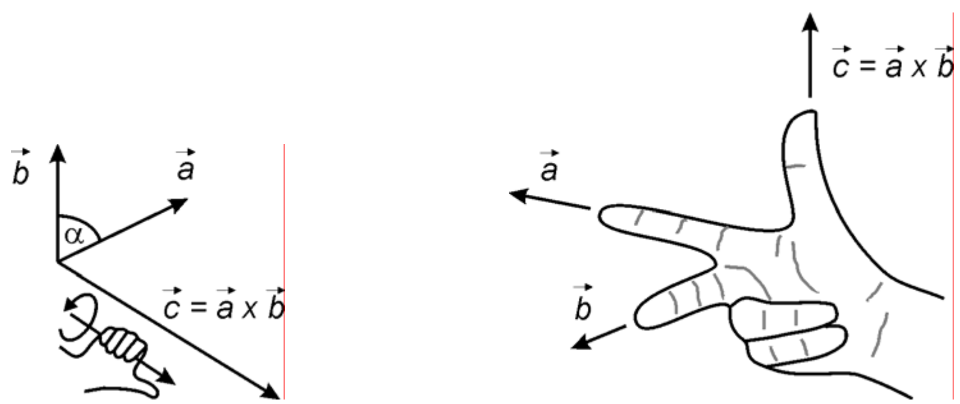


Figura 12a. Regula mâinii drepte pentru determinarea sensului şi a direcției produsului vectorial a doi vectori. 12b. Regula mâinii drepte: varianta 2.

orientăm palma mâinii drepte cu degetele întinse de-a lungul vectorului $\vec{a}$ (degetul mare orientat perpendicular pe celelalte degete) iar apoi îndoim degetele înspre vectorul $\vec{b}$, pe drumul cel mai scurt. Degetul mare vă va da direcția şi sensul vectorului produs vectorial dintre $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ (este perpendicular şi pe $\vec{a}$ şi pe $\vec{b}$), vezi *Figura 12a*. O altă variantă: **regula burghiului** drept, a tirbuşonului, a capacului de pix, ...: țineți pixul cu o mână, de corpul acestuia (nu de capac) perpendicular pe vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Rotiți capacul la fel cum ați roti vectorul $\vec{a}$ peste vectorul $\vec{b}$ pe drumul cel mai scurt. Sensul de înaintare al capacului vă va da sensul vectorului produs vectorial dintre $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. **O altă variantă**, *Figura 12 b*: orientăm arătătorul mâinii drepte de-a lungul vectorului $\vec{a}$, degetul mijlociu (perpendicular pe arătător) de-a lungul vectorului $\vec{b}$. Degetul mare, perpendicular pe celelalte două degete, va indica direcția şi sensul vectorului produs vectorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

- produsul vectorial este *anticomutativ*: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Proiecția unui vector pe o axă.

Definim proiecția unui vector pe o axă ca fiind un **SCALAR**, care se obține ducând perpendiculare din originea şi vârful vectorului, pe acea axă (proiecția ortogonală). Dacă notăm cu α unghiul dintre vector şi axa respectivă, atunci mărimea proiecției este $b\cos\alpha$, vezi *Figura 13.*

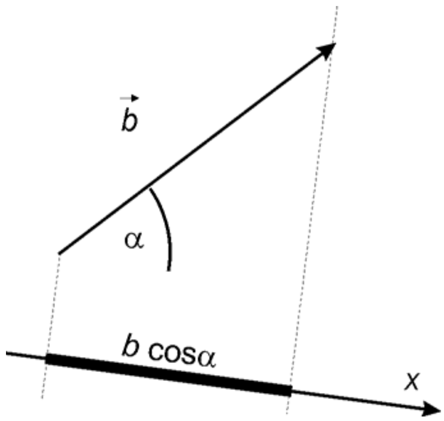


Figura 13. Proiecția unui vector $\vec{b}$ *pe o axă x.*

Produsul scalar a doi vectori.

Prin combinarea a doi vectori folosind produsul scalar obținem un scalar (număr). Dacă $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt doi vectori, produsul scalar "*c*" al celor doi vectori se defineşte ca:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = c = ab\cos\alpha .$$

Din *Figura 14* se observă că $b\cos\alpha$ este proiecția lui $\vec{b}$ pe direcția lui $\vec{a}$. Însă $b\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a} = \frac{\vec{a}}{a}\cdot\vec{b} = \vec{1}_a\cdot\vec{b}$. Deci proiecția lui $\vec{b}$ pe direcția $\vec{a}$, o obținem înmulțind scalar vectorul $\vec{b}$ cu versorul direcției $\vec{a}$.

La fel, $a\cos\alpha$ este proiecția lui $\vec{a}$ pe direcția lui $\vec{b}$: $a\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b} = \vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{b} = \vec{a}\cdot\vec{1}_b$. Deci proiecția lui $\vec{a}$ pe direcția $\vec{b}$, o obținem înmulțind scalar vectorul $\vec{a}$ cu versorul direcției $\vec{b}$.

Generalizând, putem afirma că:

! PROIECȚIA UNUI VECTOR PE O AXĂ OARECARE O OBȚINEM ÎNMULȚIND SCALAR VECTORUL CU VERSORUL AXEI RESPECTIVE !

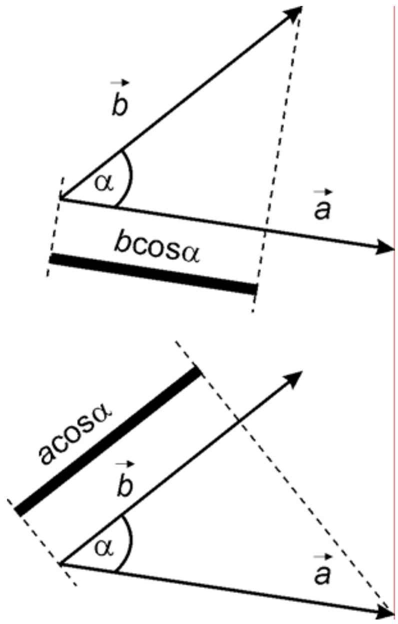


Figura 14. Proiecția (ortogonală) a vectorului $\vec{b}$ pe vectorul $\vec{a}$ (sus) şi a vectorului $\vec{a}$ pe vectorul $\vec{b}$ (jos).

Mai mult,

! UNGHIUL DINTRE DOI VECTORI POATE FI CALCULAT DACĂ SE CUNOSC PRODUSUL SCALAR A CELOR DOI VECTORI ŞI MĂRIMILE VECTORILOR RESPECTIVI: $\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}$ **!**

Dacă unghiul dintre direcțiile celor doi vectori este de 90°, i.e. vectorii sunt perpendiculari, produsul lor scalar este nul ($\cos 90 = 0$)

! CONDIȚIA DE PERPENDICULARITATE: DOI VECTORI SUNT PERPENDICULARI ATUNCI CÂND PRODUSUL LOR SCALAR ESTE NUL. !

Exemplu:

Dacă $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$ sunt versorii unui sistem de axe perpendiculare *x*, *y* şi *z*, atunci:

$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ ($\vec{i} \cdot \vec{i} = i \cdot i \cos 0$, vectorii sunt versori deci au mărimea *i* = 1 iar unghiul dintre ei este de 0 grade). Analog: $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ şi $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$. Produsele mixte sunt nule: $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ şi $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ deoarece unghiul dintre versori este de 90 grade.

Ce obținem dacă înmulțim scalar, un vector cu el însuşi?

$\vec{a} \cdot \vec{a} = aa \cos 0 = a^2$

! PĂTRATUL MĂRIMII (MODULULUI) UNUI VECTOR ÎL PUTEM CALCULA ÎNMULȚIND SCALAR VECTORUL CU EL ÎNSUŞI. !

Exemplu:

Să calculăm mărimea vectorului $\vec{c}$ sumă a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Conform definiției de mai sus, pătratul mărimii vectorului $\vec{c}$ îl putem afla înmulțind scalar vectorul $\vec{c}$ cu el însuşi:

$$
\begin{aligned}
c^2 &= \vec{c} \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \\
&= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\
&= a^2 + ab \cos \alpha + ba \cos \alpha + b^2 = \\
&= a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha
\end{aligned}
$$

O expresie similară pentru scăderea vectorilor poate fi dedusă uşor.

Descompunerea vectorilor.

Descompunerea vectorilor este operația inversă compunerii. Fie $\vec{a}$ un vector şi *x*, *y* două direcții (axe) oarecare, neparalele, din plan. Ducând, prin vârful şi originea vectorului $\vec{a}$, paralele la direcțiile din plan, obținem două componente, $\vec{a}_x$ şi $\vec{a}_y$. Se poate uşor verifica: $\vec{a}_x + \vec{a}_y = \vec{a}$, *Figura 15*, stânga. **Dacă cele două direcții (axe) sunt perpendiculare**, atunci mărimile vectorilor $\vec{a}_x$ şi a $\vec{a}_y$ sunt chiar **PROIECȚIILE** vectorului $\vec{a}$ pe axa *x* şi respectiv *y*, în sensul definiției date mai sus, vezi *Figura 15*, dreapta.

Dacă $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sunt versorii celor două axe, $\vec{a}_x$ se poate scrie ca $\vec{a}_x = a_x\vec{i}$, $\vec{a}_y = a_y\vec{j}$ iar $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$.

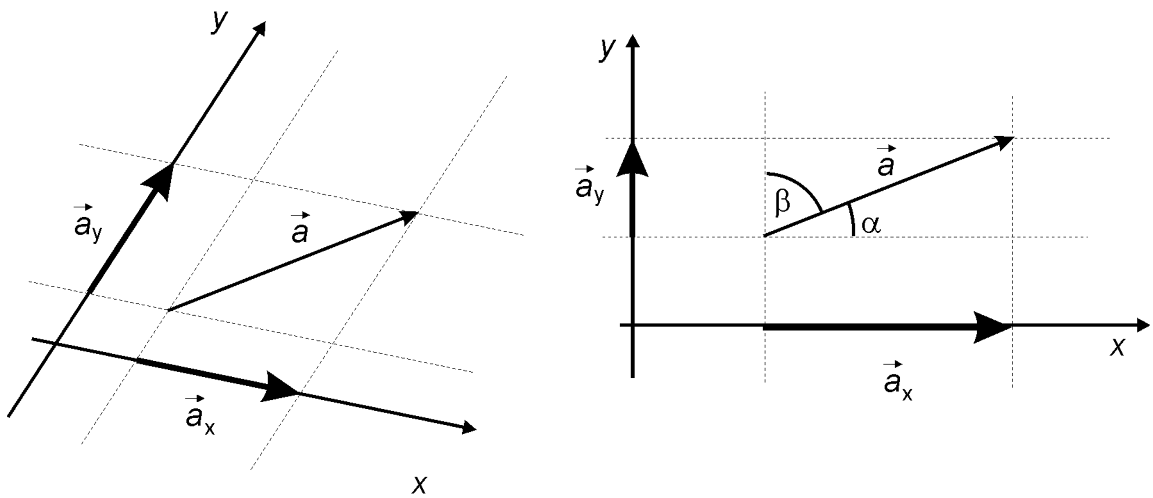
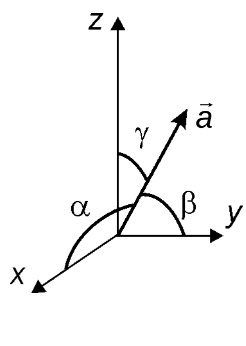


Figura 15. st\nga: descompunerea unui vector pe două axe oarecare, neparalele; dreapta: descompunerea unui vector pe două axe perpendiculare.

DACĂ CELE DOUĂ AXE SUNT PERPENDICULARE (adică $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$), se poate arăta uşor că proiecția vectorului $\vec{a}$ pe axa *x*, a_x, o obținem înmulțind scalar vectorul ($\vec{a}$) cu versorul axei ($\vec{i}$): $a_x = \vec{a} \cdot \vec{i} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j}\right)\vec{i} = a_x\vec{i} \cdot \vec{i} + a_y\vec{j} \cdot \vec{i}$ deoarece $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ iar $\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, axele fiind perpendiculare. Analog pentru a_y : $a_y = \vec{a} \cdot \vec{j}$. Pe de altă parte, dacă se cunosc unghiurile dintre vectori şi axele de coordonate, **unghiurile directoare α şi β** - vezi figura de mai sus, atunci: $a_x = a\cos\alpha$, $a_y = a\cos\beta$.

ÎN CELE CE URMEAZĂ NE VOM OCUPA DOAR DE CAZUL ÎN CARE AXELE DE COORDONATE SUNT PERPENDICULARE.

Generalizare: În cazul în care vectorul $\vec{a}$ este în spațiu şi ne alegem un sistem de 3 axe de coordonate perpendiculare *x*, *y* şi *z* (cu versorii: $\vec{i}$ pentru direcția *x*, $\vec{j}$ pentru direcția *y* şi $\vec{k}$ pentru direcția z) atunci: $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$ adică $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. a_x , a_y şi a_z sunt proiecțiile vectorului $\vec{a}$ pe cele trei axe şi $a_x = \vec{a} \cdot \vec{i}$, $a_y = \vec{a} \cdot \vec{j}$ iar $a_z = \vec{a} \cdot \vec{k}$ sau, $a_x = a\cos\alpha$, $a_y = a\cos\beta$



şi $a_z = a\cos\gamma$, unde cosα, cosβ şi cosγ sunt cosinuşii directori ai direcției descrise de vectorul $\vec{a}$, i.e. cosinusul unghiurilor dintre $\vec{a}$ cu fiecare dintre cele trei axe.

a_x, a_y şi a_z se mai numesc şi coordonatele vectorului $\vec{a}$ pe cele trei axe[5].

În cazul în care cunoaştem proiecțiile vectorului pe axele de coordonate putem folosi o formă simplificată de scriere: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, expresie care se citeşte: vector $\vec{a}$ de coordonate a_x, a_y şi a_z. Vom folosi în continuare această formă simplificată pentru descrierea operațiilor cu vectori. Reluăm toate operațiile cu vectori definite mai sus.

Înmulțirea unui vector cu un scalar.

Fie vectorul $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ şi scalarul *b*. Rezultatul produsului $\vec{a}b$ este un vector, $\vec{c}$.

$$\vec{c} = b\vec{a} = \vec{a}b = b(a_x, a_y, a_z) = (a_x, a_y, a_z)b = (a_x b, a_y b, a_z b) = (c_x, c_y, c_z)$$

Pentru demonstrație, scriem vectorii în forma desfăşurată: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$. $\vec{c} = \vec{a}b = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})b = a_x b\vec{i} + a_y b\vec{j} + a_z b\vec{k} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ sau, în formă prescurtată, $\vec{c} = (a_x b, a_y b, a_z b)$ QED.

Aceste formule pot fi uşor generalizate pentru operația de împărțire a unui vector cu un scalar.

Produsul scalar a doi vectori.

Fie vectorii $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ şi $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Produsul scalar a celor doi vectori este $c = \vec{a}\cdot\vec{b}$, adică $c = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Pentru demonstrație, scriem vectorii în forma desfăşurată:

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$,

şi efectuăm produsul scalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$:

[5] Pe de altă parte, cosinuşii directori determină o direcție în spațiu. Toate punctele de pe acea direcție pot fi obținute dând valori parametrului *t* din expresia $(t\cos\alpha, t\cos\beta, t\cos\gamma)$.

$\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$. Se observă că în expresia finală rămân doar termenii corespunzători produselor $\vec{i}\cdot\vec{i}$, $\vec{j}\cdot\vec{j}$ şi $\vec{k}\cdot\vec{k}$ (egale cu 1), deoarece ceilalți termeni sunt nuli ($\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, ...), versorii din produse fiind perpendiculari.

Unghiul α dintre doi vectori îl putem uşor calcula dacă ştim proiecțiile celor doi vectori:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\vec{b}}{ab}\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$ deoarece

$a=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ şi $b=\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}$ (teorema lui Pitagora, pătratul mărimii unui vector este suma pătratelor componentelor acestuia).

Adunarea vectorilor.

Fie vectorii $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ şi $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$. Vectorul sumă $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ se poate scrie: $\vec{c}=\left(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\right)$.

Pentru demonstrație, scriem vectorii în forma desfăşurată:

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$,

efectuăm operația de adunare: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}+b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$,

grupăm termenii: $\vec{c}=\left(a_x+b_x\right)\vec{i}+\left(a_y+b_y\right)\vec{j}+\left(a_z+b_z\right)\vec{k}$

scriem vectorul $\vec{c}$ folosind notația simplificată: $\vec{c}=\left(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\right)$, QED.

Expresia obținută poate fi uşor generalizată pentru adunarea unui număr oricât de mare de vectori, vezi exemplul din povestea introductivă.

Mărimea vectorului sumă o calculăm uşor dacă ştim mărimea fiecărui vector din sumă şi unghiul dintre ei, folosind definiția de la pagina 7:

$$c^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}\vec{a}+\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{a}+\vec{b}\vec{b}=a^2+b^2+2ab\cos\alpha$$

Pe de altă parte, dacă ştim proiecțiile vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, adică ştim componentele lui $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ şi $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, atunci prima dată calculăm $\vec{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$ iar apoi $c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2$.

Scăderea vectorilor.

Fie vectorii $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ şi $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Vectorul diferență $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ se poate scrie: $\vec{c} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$. Analog cu calculul de mai sus (de la adunarea vectorilor) mărimea vectorului diferență va fi:

$$c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2.$$

Produsul vectorial a doi vectori.

Fie vectorii $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ şi $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Să calculăm produsului vectorial $\vec{c} = \vec{a} x \vec{b}$:

$\vec{c} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) x (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$. Pentru efectuarea calculelor, avem nevoie de toate produsele vectoriale ale versorilor. Se poate arăta uşor că: $\vec{i} x \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} x \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} x \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j} x \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k} x \vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i} x \vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{i} x \vec{i} = \vec{0}$, $\vec{j} x \vec{j} = \vec{0}$, $\vec{k} x \vec{k} = \vec{0}$. După calcule şi regruparea termenilor vom obține:

$$\vec{c} = (c_x, c_y, c_z) = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x) =$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

Observați simetria termenilor rezultanți.

Calculați determinantul $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

Se observă că $\vec{c} = \vec{a} x \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Produsul mixt

Produsul mixt este o operație care implică trei vectori: $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ şi se defineşte ca $\vec{a}(\vec{b}x\vec{c})$. Rezultatul este un scalar $d=\vec{a}(\vec{b}x\vec{c})$. Arătați că $d=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$, adică $d=a_x(b_yc_z-c_zb_y)+a_y(b_zc_x-c_xb_z)+a_z(b_xc_y-c_yb_x)$. Observați simetria rezultatului. Arătați că dacă $d=\vec{a}(\vec{b}x\vec{c})$, atunci $d=\vec{a}(\vec{b}x\vec{c})=\vec{c}(\vec{a}x\vec{b})=\vec{b}(\vec{c}x\vec{a})$

Arătați că produsul mixt a trei vectori este egal cu volumul paralelogramului format de cei trei vectori.

! VOLUMUL PARALELIPIPEDULUI FORMAT DE TREI VECTORI POATE FI OBȚINUT CALCULÂND PRODUSUL MIXT AL CELOR TREI VECTORI. !

! CONDIȚIA DE COPLANARITATE A TREI VECTORI ESTE CA PRODUSUL LOR MIXT SA FIE NUL (VOLUMUL PARALELIPIPEDULUI FORMAT DE TREI VECTORI COPLANARI ESTE ZERO). !

Dublul produsul vectorial.

Dublul produs vectorial este o operație care implică de asemenea trei vectori: $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ şi se defineşte ca $\vec{a}x(\vec{b}x\vec{c})$. Rezultatul este un vector $\vec{d}=\vec{a}x(\vec{b}x\vec{c})$. Se poate arăta că $\vec{d}$ se poate scrie ca $\vec{d}=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})$. Expresia aceasta este uşor de memorat dacă urmărim simetria ei şi ne gândim că vectorul $\vec{d}$ trebuie să se găsească în planul definit de vectorii $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ (demonstrați acest fapt) şi deci poate fi descompus pe aceste două direcții. Atenție la descompunere: direcțiile definite de vectorii $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ nu sunt neapărat ortogonale (Figura 15).